2К

УДК 519.1

Л.М. Колєчкіна, О.А. Родіонова
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»,Україна

Розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності

Стаття є продовженням досліджень у сфері екстремальних задач та задач багатокритеріальної оптимізації. Розглядається екстремальна задача на комбінаторній конфігурації розміщень за умови багатокритеріальності, що полягає в знаходженні множини елементів конфігурації, за яких досягається певне значення векторної функції. Описується метод розв'язування багатокритеріальної задачі на конфігурації розміщень на основі теорії графів з урахуванням структури комбінаторної конфігурації. Розглянуто приклад реалізації методу та описані параметри числових експериментів.

Вступ

Для моделювання прикладних задач та проблем використовуються екстремальні задачі, що є досить поширеними останнім часом. Значне місце серед вказаного типу задач належить екстремальним задачам на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності. Векторна функція, що складається з набору непорівнюваних критеріїв, визначається на певній комбінаторній конфігурації, властивості якої відповідають умовам поставленої задачі. Збільшення спектра застосування моделей комбінаторної оптимізації та ускладнення задач на комбінаторних конфігураціях, що не є достатньо вивченими та дослідженими, створюють умови для пошуку нових методів та модифікації існуючих з метою оптимізації процесу обробки даних. Перспективним шляхом розвитку методів розв'язування екстремальних задач є застосування підходів, що ґрунтуються на теорії графів.

Для опису різних типів комбінаторних задач може бути використана теорія графів. Перевагою використання є не лише наочність графічного представлення, а й можливість одержання нових підходів до розв'язування екстремальних комбінаторних задач, що враховують властивості комбінаторних конфігурацій. Тісний зв'язок з метричними характеристиками графів мають проблеми оцінки числа ітерацій та ефективності алгоритмів симплексного типу в задачах лінійного програмування.

Дана робота є продовженням досліджень [1-5] і дає можливість розв'язати складну екстремальну комбінаторну задачу за умови багатокритеріальності, що полягає в знаходженні множини елементів конфігурації, при яких досягається задане значення функції. Слід зазначити, що дана задача є підзадачею для загальної екстремальної задачі за умови багатокритеріальності та додаткових обмежень.

Постановка задачі. Розглянемо поняття комбінаторної конфігурації з метою подальшого викладу матеріалу. Нехай задані множини $X = \{1,2,...,m\}$, $Y = \{y_1, y_2,..., y_n\}$, і нехай на Y задане упорядкування: $Y = y_1 < y_2 < ... < y_n$. Відображення $\varphi : X \to Y$, що задовольняє деякий комплекс обмежень Λ, будемо називати конфігурацією. Комплекс обмежень Λ, що задовольняє відображення φ, визначає деякий клас конфігурації, який відповідає умовам комбінаторної конструкції в задачі [5].

Екстремальна комбінаторна задача на комбінаторній конфігурації за умови багатокритеріальності відрізняється наявністю більше ніж одного критерію, що можуть бути представлені набором функцій $f_j(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$, $j \in N_l$ або у вигляді векторного критерію $F(x)=(f_1(x), f_2(x),..., f_l(x))$.

Слід зазначити, що загальним підходом до розв'язування багатокритеріальних задач є зведення їх до скалярних шляхом визначення ваги кожного з критеріїв оптимальності, тобто визначення вагових коефіцієнтів μ_i та $f(x)=\sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x)$. Таким чином, векторна задача стає однокритеріальною і для знаходження екстремальних значень можуть використовуватись методи розв'язування скалярних задач.

В загальному екстремальна задача на комбінаторній конфігурації за умови багатокритеріальності формулюється так: маємо множину з n елементів, на ній задається комбінаторна конфігурація $A=\{\sigma_i\}=\{a_1, a_2,..., a_k\}$. На множині A задається вектор-функція $F(x)=(f_1(x), f_2(x),.., f_l(x))$. Необхідно знайти екстремум функції $f(x)=\sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x)$ та елементи множини A, у яких цей екстремум досягається.

Враховуючи, що в екстремальних задачах можуть бути присутні і додаткові обмеження, які звужують сферу допустимих значень, то є доцільним використати для пошуку розв'язку такої багатокритеріальної екстремальної задачі підпрограму у вигляді алгоритму, що розроблений за методом локалізації значення функції на деякій комбінаторній конфігурації [1], [4]. Суть алгоритму полягає у поступовому поглибленні у структуру графа комбінаторної конфігурації, розбитого на підграфи, причому відкидаються ті підграфи, які не можуть містити розв'язку. Такий підхід значно скорочує кількість варіантів перебору та оптимізує процес розв'язування задачі.

Граф розглядаємо як фігуру, що складається з непорожньої скінченної множини V точок (вершин) і скінченної множини E орієнтованих чи неорієнтованих ліній (ребер), що з'єднують деякі пари вершин. Підграфом рангу r графа конфігурації розміщень назвемо граф, вершини якого мають r фіксованих координат.

Алгоритм розв'язування багатокритеріальної екстремальної задачі на комбінаторній конфігурації розміщень

Крок 0. Зведемо багатокритеріальну задачу до однокритеріальної. Знайдемо значення коефіцієнтів відповідної скалярної функції $f(x)=\sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x)$ та впорядкуємо їх за зростанням, тоді дана функція набуває вигляду:

$$f(x)=\tilde{c}_1 x_1+...+\tilde{c}_n x_n,\ \tilde{c}_1 \le \tilde{c}_2 \le ... \le \tilde{c}_n,$$

а до вихідного вигляду приходимо, застосовуючи перетворення до коефіцієнтів:

$$\tilde{c}_i = c_{\pi^{-1}},\ \pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ c_1 & c_2 & ... & c_n\end{pmatrix},\ \pi^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & ... & \tilde{c}_n\end{pmatrix}.$$

Крок 1. Визначаємо кількість вершин графу комбінаторної конфігурації [1]. Для розміщень це значення дорівнює $\frac{k!}{(k-n)!}$.

Крок 2. Визначаємо кількість крайніх точок у загальному графі кожного з підграфів.

Крок 3. Обчислюємо максимальне та мінімальне значення заданої цільової функції в крайніх точках підграфів загального графа:

$$f(x)_{\max} = c_1 x_{k-n+1} + c_2 x_{k-n+2} + ... + c_{n-1} x_{k-1} + c_n x_k ;$$

$$f(x)_{\min} = c_n x_1 + c_{n-1} x_2 + ... + c_2 x_{n-k-1} + c_1 x_{n-k} .$$

Крок 4. Будуємо структурний граф, що представляє розкладання графа на підграфи та відображає лише крайні вершини підграфа.

Крок 5. Визначаємо значення цільової функції в початковій та кінцевій вершинах підграфів.

Крок 6. Визначаємо множину структурних підграфів, для яких задане значення цільової функції може міститись між його крайніми точками.

Крок 7. Формуємо множину точок-елементів конфігурації, для яких $f(x^*) = y$ [1-3]. Якщо всі точки знайдено (тобто серед множини підграфів немає таких, для яких би виконувалась умова кроку 6), то задача розв'язана. Виводимо елементи конфігурації. Інакше – переходимо на крок 8.

Крок 8. У підграфі, визначеному на кроці 6, фіксуємо останню координату в точці – вершині підграфу. Здійснюємо перехід на крок 1.

Вище описаний алгоритм програмно реалізовано для конфігурації розміщень. Розглянемо числовий приклад його роботи.

Приклад 1. Дано: а) набір рівноважливих функцій $f_j(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$, $j \in N_l$, де $k = 4$, $l = 3$:

$$f_1(x) = -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 ,$$
$$f_2(x) = 3x_1 - x_2 + 8x_3 + -2x_4 ,$$
$$f_3(x) = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 ;$$

б) визначено значення скалярної функції $f(x^*) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x^*) = 23$;

в) елементи множини розміщень (1 2 3 4 5 6 7 8).

Знайти: точки – елементи конфігурації розміщень, у яких досягається задане значення цільової функції.

Розв'язання: знайдемо значення коефіцієнтів функції $f(x) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x)$. Враховуючи рівноважливість критеріїв, що входять до складу вектор-функції, маємо $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$, тоді $F(x) = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$.

Для впорядкування елементів цільової функції визначимо відображення π : $c = (2,1,5,3)$, $\varepsilon_{i^0} = (1,2,3,5)$, $\varepsilon_{i^0} = c_{\pi^{-1}}$ $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Будуємо граф, який містить $\frac{8!}{(8-4)!} = 1680$ вершин. Визначимо мінімальне та максимальне значення цільової функції:

$$\max := 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 78,$$
$$\min := 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 21.$$

Згідно з алгоритмом, визначимо крайні точки підграфів та знайдемо значення цільової функції в них. Будуємо структурний граф многогранника розміщень (рис. 1).

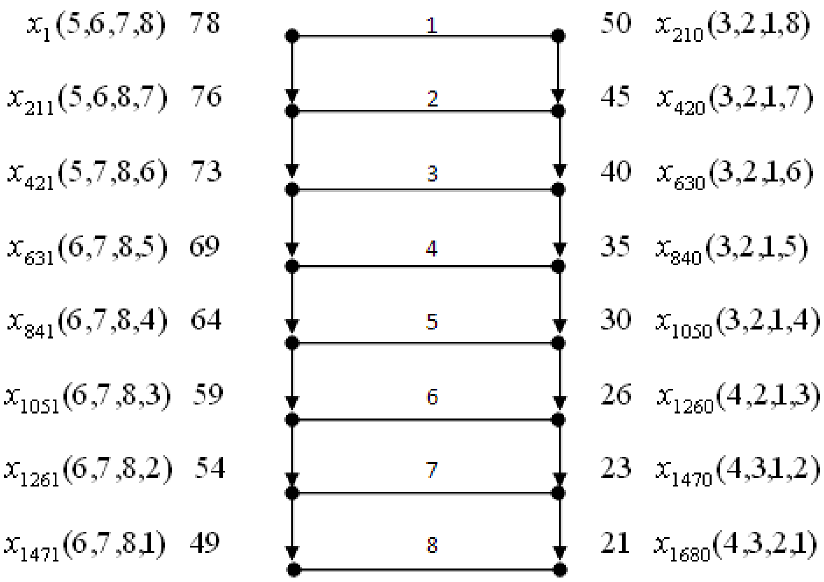


Рисунок 1 – Структурний граф многогранника розміщень

З рис. 1 видно, що шукане значення функції, яке рівне 23, може досягатись лише на 7 та 8 рівнях структурного графу. Таким чином перші 6 рівнів розглядати не будемо. Розглянемо наступний підграф, зафіксувавши останню координату $x_4 = 1$, що належить усім вершинам підграфу 8. Одержимо наступний структурний граф (рис. 2).

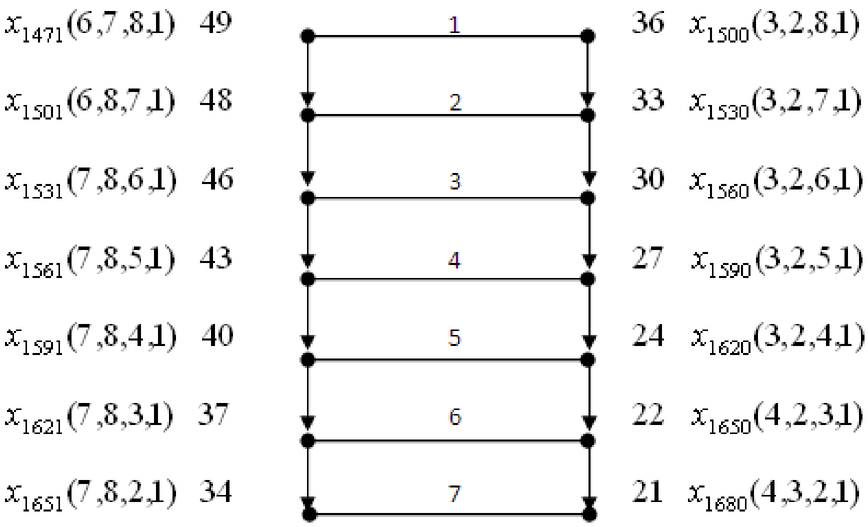


Рисунок 2 – Структурний граф ІІ рівня многогранника розміщень при $x_4 = 1$

Шукане значення міститься між вершинами $x_{1621}(7,8,3,1)$ і $x_{1650}(4,2,3,1)$ (рівень 6) та $x_{1651}(7,8,2,1)$ і $x_{1680}(4,3,2,1)$ (рівень 7). Отже, тепер зафіксуємо значення наступної координати $x_3 = 2$ та проведемо обчислення для підграфа наступного рівня, де знаходяться вершини, у яких досягається шукане значення $F(x^*) = 23$ (рис. 3).

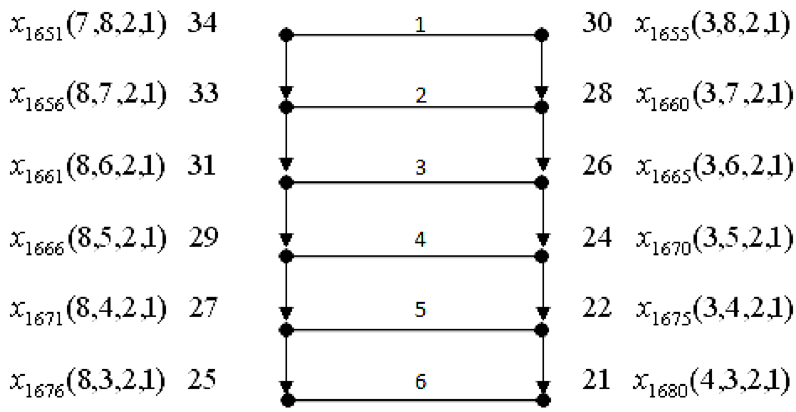


Рисунок 3 – Структурний граф II рівня многогранника розміщень при $x_4 = 1$, $x_3 = 2$

Зафіксуємо значення $x_2 = 3$ та знайдемо значення у відповідних точках. Одержимо точку $x = (6,3,2,1)$, у якій досягається значення 23. Таким чином з урахуванням відображення функції одержуємо $x^* = (3,6,1,2)$, для якої $f(x^*) = 23$.

Провівши аналогічні розрахунки для усіх підграфів, для яких виконується умова кроку 6, одержимо наступні точки, що будуть розв'язками задачі (табл. 1):

Таблиця 1 – Координати вершин, що є розв'язками задачі

x_1	x_2	x_3	x_4	$F(x)$
3	4	2	1	23
3	6	1	2	23
2	5	1	3	23

Отже, одержано три точки, що задовольняють умові задачі, значно скоротивши кількість варіантів перебору: розглянуто 100 точок із 1680.

Таблиця 2 – Результати числових експериментів

№	Розмірність функції n	Кількість елементів множини k	Кількість підграфів	Кількість точок	Час	Значення функції	Кількість розв'язків
1	5	7	34	117	0,66	107	9
2	5	7	5	18	0,0001	110	1
3	5	7	15	54	0,22	51	4
4	5	7	57	181	1,15	105	16
5	5	6	120	274	2,19	79	26
6	5	6	166	366	2,02	74	20
7	5	6	194	413	3,57	69	34
8	5	6	33	83	0,55	53	8
9	4	6	64	178	1,26	53	17
10	4	6	10	31	0,1	67	3
11	4	6	29	87	0,49	62	6
12	4	6	54	154	1,05	57	12
13	4	7	32	124	0,66	76	7
14	4	7	85	317	1,98	66	19
15	4	7	108	399	2,59	61	32
16	4	7	32	124	0,66	36	7
17	3	6	6	20	0,0001	46	2
18	3	6	14	48	0,22	40	5
19	3	7	28	123	0,66	35	11
20	3	7	15	65	0,27	45	5
21	3	7	25	103	0,55	41	10
22	3	7	9	39	0,11	19	3

Вищевказаний алгоритм програмно реалізований та проведені числові експерименти. Розрахунки показали ефективність даного алгоритму для розглядуваного класу задач, оскільки кількість варіантів перебору значно скорочується. Числові експерименти об'єднаємо і представимо у табл. 2, відобразивши наступні параметри: розмірність цільової функції, кількість елементів множини, кількість підграфів, на які розбивається граф, кількість точок, у яких знаходиться значення функції, час виконання програми, шукане значення функції, кількість розв'язків.

Аналізуючи дані табл. 2, можна побудувати графічні залежності кількості розглянутих точок від кількості розв'язків (рис. 4) та часу роботи програми від кількості розв'язків задачі (рис. 5).

З рис. 4 та 5 видно, що існує прямо пропорційна залежність між кількістю розв'язків та кількістю точок, що розглядаються, причому ця кількість значно менша кількості вершин графа, які мав би пройти алгоритм при повному переборі, що свідчить про ефективність роботи програми.

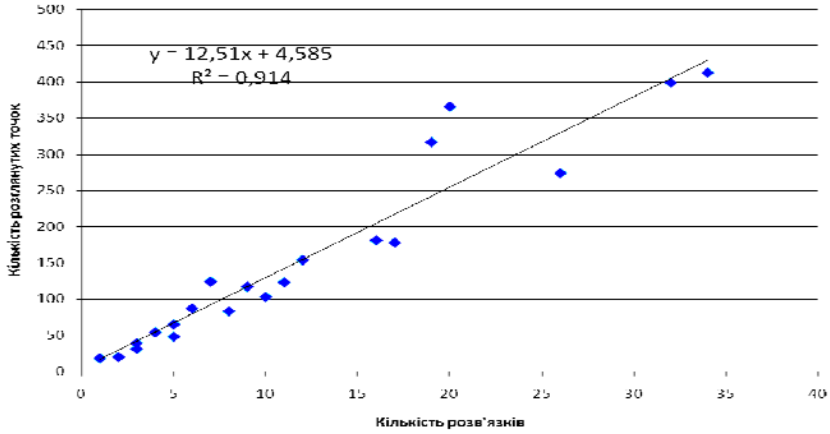


Рисунок 4 – Графік залежності кількості розглянутих точок комбінаторної конфігурації від кількості розв'язків

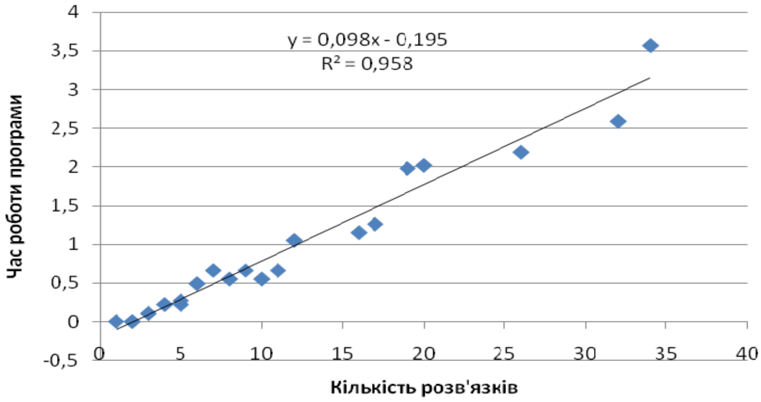


Рисунок 5 – Графік залежності часу роботи програми від кількості розв'язків

Висновки

Виконано постановку екстремальної комбінаторної задачі за умови багатокритеріальності. Для теоретичних та прикладних досліджень сформульована задача є актуальною, а запропонований шлях пошуку розв'язків використовується як допоміжний алгоритм у загальному методі розв'язування екстремальних задач за умови багатокрите-

ріальності. Застосування теорії графів до пошуку ефективних підходів до розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях дає можливість вдосконалення методів пошуку розв'язків поставленої задачі та інших класів задач. Подальші дослідження плануються у сфері розробки загального алгоритму на різних комбінаторних конфігураціях.

Литература

1. Донец Г.А. Локализация значения линейной функции заданной на перестановках / Г.А. Донец, Л.Н. Колечкина // Радиоэлектроника и информатика. – 2009. − № 1. – С. 76-81.
2. Донец Г.А. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок / Г.А. Донец, Л.Н. Колечкина // Кибернетика и системный аналіз. – 2009. – № 2. – С. 50-61.
3. Колечкина Л. Н. Об одном алгоритме решения комбинаторных задач векторной оптимизации на множестве размещений / Л. Н. Колечкина // Искусственный интелект. – 2010. – № 1. – С. 61-69.
4. Колечкина Л.Н. Обоснование структурированного метода локализации значения линейной функции, заданной на комбинаторной конфигурации перестановок / Л.Н. Колечкина // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 67-80.
5. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики / Сачков В.Н. – М. : Наука, 1977. – 320 с.

Literatura

1. Donec G.A. Radiojelektronika i informatika. 2009. № 1. P. 76-81.
2. Donec G.A. Kibernetika i sistemnyjanaliz. 2009. № 2. P. 50-61.
3. Kolechkina L.N. Iskusstvennyjintelekt. 2010. № 1. P. 61-69.
4. Kolechkina L.N. Dinamicheskiesistemy. 2009. Vyp. 27 P. 67-80.
5. Sachkov V.N. Moscow : Nauka. 1977. 320 p.

Л.Н. Колечкина, Е.А. Родионова

Решение экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях при условии многокритериальности

Статья является продолжением предыдущих исследований. Рассматривается экстремальная задача на комбинаторной конфигурации размещений, которая состоит в поиске точек множества, в которых достигается заданное значение функции. Описывается метод локализации значения целевой функции на основании теории графов с учетом структуры множества размещений. Рассмотрен пример реализации метода и описаны параметры числовых экспериментов.

L.M. Kolechkina, O.A. Rodionova

Solution of Extremal Tasks on Combinatorial Configurations with Multicriteria

This paper is a continuation of previous studies. We consider the extremal problem on combinatorial configuration which consists of finding points of the set in which the specified value of the function is attained. The method for the localization of the target function on the basis of graph theory, given the structure of the set of arrangements is described. The example of realization of the method is considered and the numerical parameters of experiments are described.

Стаття надійшла до редакції 15.03.2011.